Chapter0. Introduction

2019年2月22日

16:28

**NOTE TAKING AREA**

Textbook and references

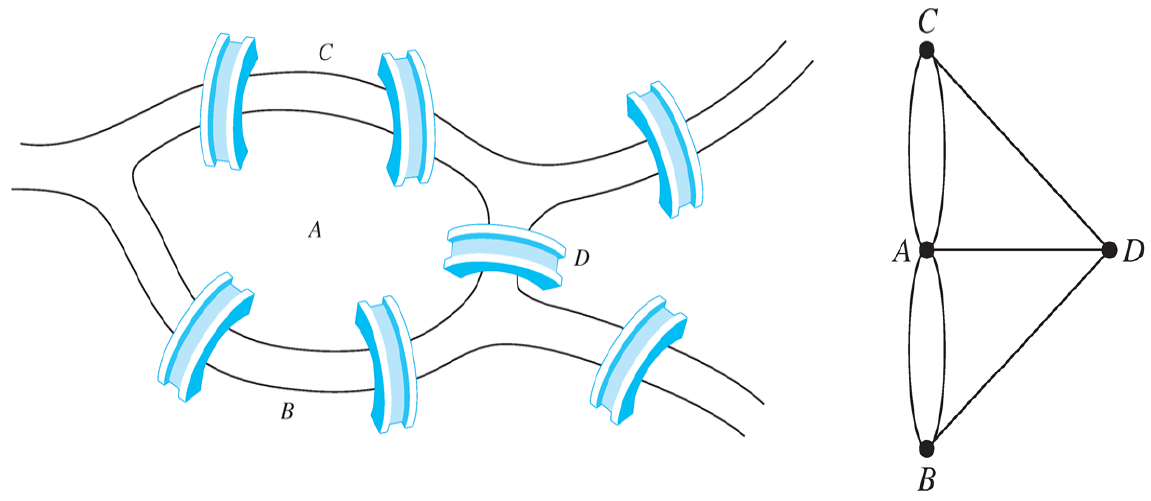
* 《离散数学及其应用》：课本。
* 《具体数学》：计算机需要用的数学知识。
* 《算法导论》：CLRS BOOK，祝好。

Grades

* Quiz in class 10% - attendance required.
* Homework assignments 20% - submit at sakai.
* Midterm exam 30% - April 12th, 16:20-18:20.
* Final exam 40%.

Some problems

* Color graphing:
  + Four-color theorem: no more than four colors are required to color the regions of the map so that no two adjacent regions have the same color.
  + Applications of graph coloring: scheduling final exam, channel assignments.
* Seven-bridge problem: pass all bridges once without walk repetition.



* Fibonacci number: F0 = 1, F1 = 1, Fn = Fn-1 + Fn-2 for n >= 2.
  + The closed form of Fibonacci numbers:

Consider xn 
roots 
with x # 0. 
1 
2 
Then Fn can be the form of ac/»n + bon 
There are two different 
2 
By and h -1, 
1 
we have a + b = 0 and (Pa + 0b 1, leading to a— 
—a. Therefore, 
b 

Basic concepts of discrete mathematics

* Logic: the basis of all mathematical reasoning.
  + Syntax of statements, the meaning of statements, and the rules of logic inference.
* Proposition: a **declarative** statement that is **either true of false**.
  + Usually, a proposition is **condition-based**.
  + More complex propositions can be built from elementary statement using **logical connectives**.
    - Logical connectives: negation, conjunction, disjunction, exclusive or, implication, biconditional.
      * C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image003.png
      * C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image004.png
      * C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image005.png
      * C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image006.png
      * C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image007.png
        + In which p is called **hypothesis**, and q is called **conclusion**.
        + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image008.png
        + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image009.png
        + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image010.png
      * C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image011.png
        + The statement **iff** means if and only if.
* Truth table: displays the **relationships between truth values** (T or F) of different propositions.

Computer representation of true and false

* A bit is sufficient to represent two possible values: 1 true and 0 false.
* **Boolean variable**: takes on values 0 and 1.
* **Bit string**: a sequence of zero or more bits.
  + **Length** of string: the number of bits in the string.
* **Bitwise operations**: replace T and F with 1 and 0.

**CUE COLUMN**

Example of proof

* For an integer n, if 3n+2 is odd, then n is odd.
  + Direct proof:

w.l.o.g. suppose that 3/1+2 
k. Then 
2k -1 
—2. 
3 
2k + 1 for some integer 
—1. 
3 
It suffices to prove that 
is an integer. Note that 3n + 3 
3 
is even, and so is n + 1. It then follows that 
1 
2 
3 
3 
is an integer. 
2 

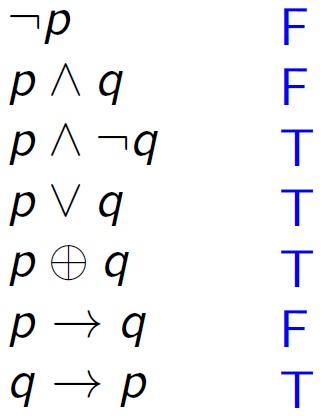
* Proof by contrapositive:

It is equivalent to prove that "If n is even , then 3/1+2 is 
even." — Why? 
w.l.o.g. suppose that n = 2k for some integer k, then 
3/1+2 _ 6k +2, 
which is even. 

* 不失一般性：without loss of generality.
* Or another contradiction, assume there exists an integer n such that 3n+2 is odd and n is even. Since n is even, so is 3n, and that 2 is odd, which is a contradiction.

Logic connectives example

* Proposition p: 2 is a prime (T), q: 6 is a prime (F). Determine the truth value:



**SUMMARIES**

1. Course information about books and grades.
2. Some typical problems.
3. Basic concepts of discrete mathematics, logical connectives.
4. Computer representation of true and false.

Chapter1-1. 命题逻辑

2019年3月10日

12:39

**NOTE TAKING AREA**

命题的基本定义

* 命题：是一个或真或假的陈述句。
  + *真命题的真值为真，用T表示；假命题的真值为假，用F表示。*
  + *涉及命题的逻辑领域被称为****命题演算****或****命题逻辑****。*

复合命题与真值表

* *真值表用以表示命题的真值，表中元素为命题变元，真值表想同的命题****等价****。*

**CUE COLUMN**

复合命题真值表的例子

计算机生成了可选文字:
例11构造复合命题()V冂q）一^q）的真值表。
解因为真值表涉及2个命题变元和q，因而此表有4行，对应4种真值组合TT、TF、FT
和FF。前两列分别表示和q的真值。第三列为门q的真值，以此决定在第4列中V的真值。
P^q的真值在第5列。最后，(PVnq）一^q）的真值在最后一列。真值表的结果如表1一7所小
表卜7复合命题（pVnq）艹^q）的真值表
(PVnq)-—(pAq)
户V
P^

**SUMMARIES**

1. 命题的基本定义。
2. 复合命题与真值表。

Chapter1-2. 命题等价

2019年3月10日

12:45

**NOTE TAKING AREA**

引言与逻辑等价

* 永真式/重言式（Tautology）：无论其中出现的命题真值是什么，复合命题的真值永远为真。
  + 真值永远为假的复合命题称为**矛盾**，而既不是永真式又不是矛盾的命题称为**可能式**。
* 在所有可能的情况下都有相同真值的两个复合命题称为**逻辑等价**。
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image016.png
    - C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image017.png
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image018.png

**CUE COLUMN**

永真式和矛盾的例子

例 《 我 们 可 以 只 用 一 个 命 题 构 造 永 真 式 和 
*1-10 
矛 盾 ． V 0 户 和 ^ 。 户 的 頁 值 表 如 表 」 ． 10 所 
示 “ 因 为 V 0 总 是 真 ， 所 以 它 是 永 真 式 。 因 
为 ^ 。 总 是 假 ， 所 以 它 是 矛 盾 。 
永 真 式 和 矛 0 的 子 

证明逻辑等价

2 니) 遡W等 
解 表 1•12齡出了遂些夏合命題的寞直. 由子酎 P 所有可能的寘債鰍合, OZ.(pVq) 
和기PA그7的貢債擲-#, 所以그(pvq)~(가PA기q)是永寶式, 遬丙수命題選豳等价. 
1•|2 - , 的A債寰 

常见逻辑等价的形式

-15 
__ρνι„ν,) 
1-17 

**SUMMARIES**

1. 逻辑等价与德摩根律。

Chapter1-3. 谓词和量词

2019年3月10日

12:56

**NOTE TAKING AREA**

谓词逻辑

* 含变量的语句在变量值未知的时候，这些语句既不为真也不为假。
  + 语句包含**主语**和**谓词**，对于变量x，**命题函数**P(x)表示P在x处的值，给x赋值之后语句P(x)就成为命题。
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image022.png
* 描述有效输入的语句叫做**前置条件**，输出应该满足的条件称为**后置条件**。

量词

* 量化：从命题函数产生命题。
  + 谓词演算：处理谓词和量词的逻辑领域。
* 全称量词：对于某一性质在变量的某一特定域内的所有值均为真，这一特定域称为变量的**论域**（全体域），语句用全称量化表示。

V. ェ お ( ) 
何 対 第 夏 
町 毎 一 个 ェ , 以 ェ ) 第 カ 真 
有 一 个 ェ ・ 使 P ( い カ 真 
何 酣 物 
有 一 个 ェ ・ 使 ェ ) カ 製 
対 毎 - 个 ハ 戸 ( ェ ) 都 カ 

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image024.png
* 存在量词：有一个具有某种性质的元素，这类语句用存在量化表示，命题成真的充分必要条件是论域中至少有一个值满足P(x)为真。
  + 若论域为空，则存在量化均为假。

其他量词

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image025.png
* 约束论域量词：缩略符号用来约束量词的论域，量词后具有变量必须满足的条件。
* 量词的优先级：量词比所有的命题演算的逻辑运算符具有更高的优先级。
* 绑定变量：量词作用的变量称为**绑定**，没有被量词绑定或设定为特定值的变量称为**自由**。

量词逻辑等价与否定量化表达式

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image026.png
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image027.png
  + 被称为量词的德摩根定律。

ょ P ( 
等 价 田 判 
Y ェ P は ) 
ヨ ェ P ( ょ ) 
何 吋 方 真 
対 毎 ↑ ェ , ハ 幻 カ 叡 
有 1 使 P ー エ ) 力 機 
何 カ 豊 
有 ハ 使 ′ ( 幻 カ 真 
町 毎 ↑ 新 ハ 幻 第 真 

**CUE COLUMN**

命题函数的真值

例 3 令 Q （ y) 表 示 语 句 “ 还 一 y + 3 “ ， 命 题 00 ， 2 ） 和 Q （ 3 ， 叻 的 真 值 是 什 么 ？ 
解 要 得 到 Q （ 1 ． 2 ） ， 在 Q(x ， 中 令 一 1 ， ， 一 2 。 因 此 ， 《 ， 2 ） 为 晤 句 “ 1 一 2 + 3 ” 
为 假 ． 语 句 03 ， 的 为 语 句 “ 3 ． ． 0 十 3 " ， 为 真 ． 

前置条件与后置条件

例 7 
考 虑 下 面 的 交 换 变 量 和 ， 值 的 程 序 · 
找 出 能 做 为 前 置 条 件 和 后 置 条 件 的 谓 词 ， 以 证 明 此 程 序 的 正 确 性 · 然 后 解 如 何 用 它 们 验 证 对 所 
有 有 效 的 输 入 ， 程 序 的 运 行 都 能 达 到 目 的 。 
鯛 对 于 前 置 条 件 ， 我 们 需 要 表 达 在 运 行 程 序 之 前 工 和 ， 被 賦 值 。 因 此 ， 对 于 这 个 前 置 条 件 
可 以 用 谓 词 P ， 到 表 示 ， 其 中 "(), ， ） 指 语 句 “ 一 ， 一 栌 ， a 和 心 是 在 运 行 程 序 之 前 和 ， 的 
值 · 因 为 我 们 想 证 明 对 于 所 有 输 人 变 量 ， 程 序 交 换 了 和 ， 的 值 ， 对 后 置 条 件 可 以 用 Q （ 厶 劝 表 
示 ， 其 中 ， ） 表 示 语 句 - 心 ， ， - 矿 
为 证 明 程 序 总 是 按 照 预 期 运 行 ， 假 设 前 置 条 件 P(), ， ） 成 立 ． 也 就 是 说 ， 假 设 命 题 一 
一 犷 为 真 ， 这 息 着 一 山 ， 一 阢 程 序 的 蚺 一 步 ， temp: 一 工 ， 将 的 值 给 在 mp ， 所 以 下 一 步 
是 r = ' ' 》 一 a ， y=b. 程 序 第 二 步 ， 厶 = ， ， 因 此 一 b ， temp—a, y=b. 最 后 ． 第 三 步 ． 我 
们 知 道 一 m 》 一 a ， 以 及 ， = “ 结 果 ， 程 序 行 后 ． 后 置 务 件 0 （ 工 ， ， ） 成 立 ， 也 就 驀 说 、 语 
句 “ = 心 ， ， 亠 疒 为 真 ． 

量词逻辑等价

例 “ 表 明 （ PCT) ^ QCT) ） 和 P 行 ） ^ 靳 Q(x ） 逻 輯 等 价 （ 论 域 始 终 相 同 这 个 逻 辑 等 价 
式 表 明 可 以 在 一 个 合 取 上 分 配 全 称 量 词 。 此 外 ， 也 可 以 在 一 个 斫 取 上 分 配 存 在 量 词 ． 鱈 血 ， 不 能 
在 析 取 上 分 配 全 称 量 词 ， 也 不 能 在 合 取 上 分 配 存 在 量 词 · （ 见 练 习 50 相 51) 
解 
为 表 爪 以 两 个 语 句 辑 等 价 ． 必 须 轰 示 出 “ 不 论 P 和 0 是 什 么 谓 词 ， 也 不 论 运 用 哪 个 个 
体 论 域 ， 它 们 总 有 相 同 百 值 ． 假 设 有 特 定 的 谓 词 P 和 0 ， 论 域 为 常 用 的 ． 可 以 做 两 件 事 来 表 示 出 
（ P(x ） ^ QCT)) 和 YMP( 刁 ^ 0 （ 、 刁 逻 辑 等 价 ． 首 先 ， 表 示 出 如 果 （ PC 刁 ^ 0 （ 刁 ） 为 真 ． 那 么 
VxP(x 〕 ^ VxQ 0 刁 为 真 ． 第 二 步 ， 表 示 出 如 WP （ ） ^ VxQ( 到 为 真 ， 那 么 （ P （ 到 ^ Q （ ） 
为 真 ． 
因 此 ， 假 设 （ 枞 到 ^ ） ） 为 真 · 这 意 味 着 如 果 a 在 论 域 中 ， 那 么 枞 “ ） ^ 的 为 真 。 所 以 ， 
枞 为 真 ， 且 Q ） 为 真 ， 因 为 对 论 域 中 每 个 对 象 p （ “ ） 为 真 ， 且 0 （ “ ） 为 真 都 成 立 ， 可 以 下 结 论 ， 
P （ 到 和 00 ） 都 为 真 。 这 意 味 着 VrP （ ^ 髫 00 ） 为 真 
下 一 步 ， 假 设 P （ 0 产 0 （ 为 真 ． 那 么 尸 （ 为 真 ， 且 Q(u ） 为 真 “ 因 此 ， 如 果 “ 在 
论 域 中 ， 那 么 尸 （ 为 真 ， 且 0 ） 为 真 （ 因 为 P(x ） 和 Q ） 对 论 中 所 有 元 累 都 为 真 ， 所 以 这 里 用 
同 样 的 值 以 不 矛 盾 ） ． 接 着 ， 对 于 所 有 的 “ ， p ） ^ 0 （ “ ） 为 真 ． 所 以 靴 （ pct ） ^ 0 〔 到 〕 为 真 · 现 在 
可 以 下 结 论 
Vx(P(x) ^ 0 （ 〕 三 VxP(x) ^ Y ． 囤 （ 

**SUMMARIES**

1. 谓词逻辑。
2. 量词和绑定变量。
3. 两次逻辑等价和否定量化表达式。

Chapter1-4. 嵌套量词

2019年3月10日

13:20

**NOTE TAKING AREA**

循环量化与量词顺序

* 嵌套量词：出现在其他量词作用域内的量词。
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image032.png
* 量词的顺序：若所有量词均为全称量词或均为存在量词时，量词顺序调整后命题依然相同。

Y 、 ハ 石 引 
れ ヨ YP け 
ヨ 才 V"P ( 才 . 
ヨ 才 ヨ YP 、 , 
ヨ ) ヨ ・ P ( . の 
何 射 内 貢 
対 毎 一 対 れ ハ 石 の 均 真 
対 毎 ↑ 石 都 有 y 使 お は , の 第 真 
有 一 个 ハ 使 P ( ハ 対 所 有 ) 均 カ 真 
有 一 対 ハ ) 使 P ( ハ 引 真 
何 村 報 
有 一 対 プ 、 、 使 P ( れ 第 
有 ェ . 使 P ( ェ , の 材 毎 个 、 急 量 
毎 ↑ ょ 都 有 ) 仗 ′ ( れ y ) 大 儀 
毎 - 第 よ 、 第 一 ( ハ ) ) 均 男 

否定嵌套量词

* 带嵌套量词的语句可通过连续地应用否定带单个量词的语句的规则成为否定的。

例 14 表 达 语 匐 （ 0 = 1) 的 否 定 ． 仗 得 量 词 前 面 没 有 否 定 词 ． 
． 解 通 过 连 续 地 应 用 否 定 量 化 语 句 的 规 则 〔 见 1-3 节 表 1 ． 17 ） ， 可 以 将 0 彐 ， 一 l) 
中 的 否 定 词 移 人 所 有 量 词 里 面 ． 我 们 发 现 ， 。 彐 ， （ 一 1) 等 价 于 。 彐 y （ = l) ， 
而 后 者 又 等 价 于 新 为 。 （ “ = 1 ） ． 由 于 0 （ ” 一 1) 可 以 简 化 为 0 关 1 ， 所 以 ， 我 们 的 否 定 语 句 可 以 
表 达 为 行 y 关 1) ． 

**CUE COLUMN**

**SUMMARIES**

1. 循环量化与量词顺序。
2. 否定嵌套量词。

Chapter1-5. 推理规则

2019年2月22日

10:04

**NOTE TAKING AREA**

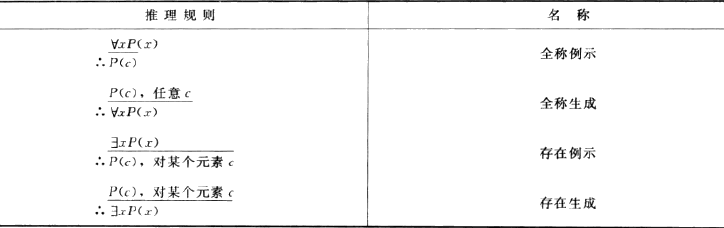
* 论证：一连串的命题最终得出结论。
  + **有效性**：计划得出结论或论证的最终命题，过程依据命题或论证前提的真实性。
  + **谬误**：无效推论，不正确推理。
* 命题逻辑的有效论证：
  + *命题逻辑中的一个论证是一连串的命题。除了论证中最后一个命题外都叫前提，最后那个命题叫结论。当它的所有前提为真意味着结论为真时，一个论证是有效的。*
    - 论证形式：涉及命题变元的一连串复合命题。
* 命题逻辑的推理规则：比较简单的有效论证形式。
  + 假言推理（分离规则）：(p∧(p→q))→q.



* 更多的推理规则见线索区。
* 用推理规则建立论证：有许多前提时需要使用多个推理规则。
* 消解：一种供计算机程序使用的**推理规则**。

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image036.png

* *使用消解来构造命题逻辑中的证明，假设和结论必须被表示为****子句****。*
  + 子句：变量的析取或这些变量的否定。
* 谬误：不正确的论证，基于偶然事件而非永真式。
  + 肯定结论谬误：命题[(p→q)∧q]→p不是永真式。
* 带量词命题的推理规则：
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image037.png
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image038.png
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image039.png
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image040.png

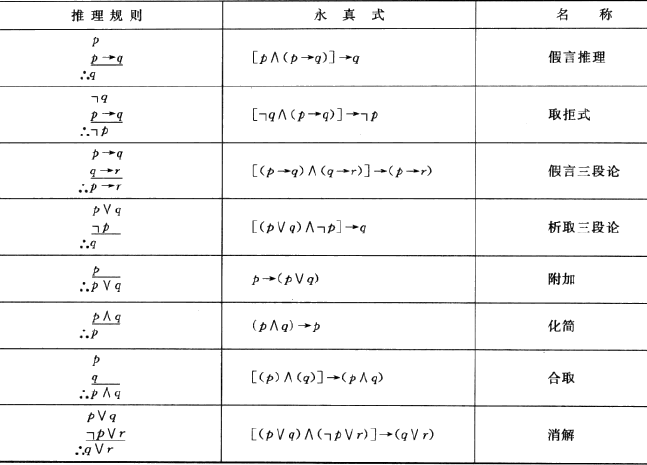


* 命题推理和量化语句推理规则的结合：全称例示和假言推理的结合称为**全称假言推理**。

Yr 口 气 丆 ） ． ． 0 （ 月 
尸 （ ， 其 中 a 是 论 域 中 一 个 特 定 的 元 素 
0 （ 钔 

**CUE COLUMN**

推理规则



**SUMMARIES**

1. 论证与有效论证。
2. 推理规则与建立论证。
3. 消解与谬误。
4. 带量词命题的推理规则。
5. 命题推理和量化语句推理。

Chapter1-6. 证明导论

2019年3月8日

14:01

**NOTE TAKING AREA**

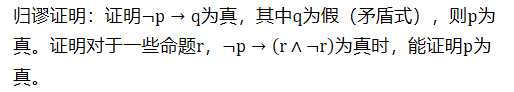
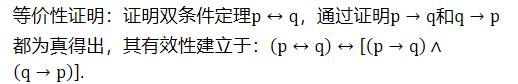
导论与专业术语

* *非形式化证明：许多推理规则用于每一步，许多步骤被省略，没有明确列出其中的假设公理和用到的推理规则。*
* 定理：一个能够表明是真的语句。
  + 定理可以包含一个或多个前提的条件语句及一个结论全称量化。
  + 命题：不太重要的定理。
* 公理（假设）：假设为真的语句，用不要求定义的原始语句陈述。
* 引理：其他结果证明中很有帮助的不大重要的定理。
  + 推论：从定理直接建立被证明的定理。
  + 猜想：被提出为真的命题，通常是在一些依据的基础上启发式论证，**可能是错误的**。

定理陈述和证明定理

* *许多定理断言一个性质对论域（比如整数或实数）中的所有元素都成立，准确陈述中需要包含全称量词，但数学的标准约定中省略全称量词。*

“ 如 果 > y ， 其 中 上 和 ， 是 正 实 数 ， 那 么 > 。 ” 
“ 对 所 有 正 实 数 工 和 ， ， 如 果 还 > ， ， 那 么 > ， 能 

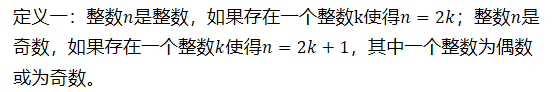
* 当证明这类定理时，使用**全称例示**规则而不明确指出。
* 证明定理的方法：
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image045.png
  + C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image046.png
  + 空证明和平凡证明：
    - C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image047.png
    - C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image048.png
  + 
  + 
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image051.png

证明中的错误

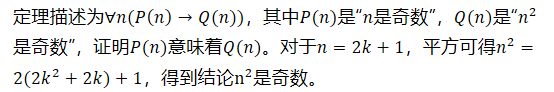
* 偷用论题谬误：证明的一个或多个步骤基于待证明命题的正确性，也成为**循环论证**。

**CUE COLUMN**

一个定理和直接证明的例子

* 

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image053.png

* 

反证法的例子

例 3 给 出 定 理 “ 若 3 。 十 2 是 奇 数 ， 则 ” 是 奇 ” NJ 证 明 ． 
能 以 · 解 首 先 ， 试 冬 用 直 接 证 明 ， 为 陶 建 直 接 证 明 ， 首 先 假 设 3 刂 + 2 是 奇 整 数 ． 这 意 昧 着 
对 某 个 整 数 六 3 “ + 2 2 玉 + 1 ． 我 们 能 由 此 证 明 “ 是 奇 数 吗 ？ 看 到 3 ” + I - 2k. 但 不 能 
用 任 何 直 接 的 方 式 得 出 “ 是 奇 数 的 结 论 ． 由 于 直 接 证 明 的 想 法 失 數 ， 下 面 试 反 证 法 ． 
反 证 法 的 第 一 步 是 假 设 条 件 语 句 “ 若 十 2 是 奇 数 ． ” 是 奇 数 ” 的 结 论 是 假 的 ； 也 就 是 说 ， 假 
设 刺 是 偶 数@ 于 是 由 偶 数 定 义 ， 对 某 个 整 数 有 = 2 杠 把 “ 川 2 玉 代 人 ， 得 到 3 ” + 2 = 3 （ 2 玉 ） + 2 = 
+ 2 = 2 （ 补 + 0 ， 这 告 诉 我 们 “ + 2 是 偶 数 （ 因 为 它 是 2 的 倍 数 因 此 不 是 奇 数 。 这 是 定 理 前 提 
的 否 定 ． 因 为 对 这 个 条 件 浯 句 结 论 的 否 定 蕴 含 着 前 提 为 假 ， 所 以 原 凍 的 条 件 语 句 为 真 反 证 法 成 
功 ， 证 明 了 定 理 “ 若 + 2 是 奇 数 ， 则 到 是 奇 数 ” 

空证明的例子

例 5 证 期 命 P 〔 的 为 真 ， 其 中 P （ 粉 是 “ 若 ” > 1. 則 是 > ” 六 论 域 是 所 有 整 数 · 
解 注 意 命 题 P ） 是 条 件 语 句 “ 若 0 > 1 ， 则 伊 > 俨 ． 因 为 前 提 0 > 1 为 假 ， 所 以 P(O) 自 动 地 

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image057.png

平凡证明的例子

例 6 设 p （ 是 “ 若 。 和 是 满 足 “ 》 b 的 正 整 数 ． 則 矿 》 六 其 中 论 域 是 所 有 整 数 · 证 明 命 
題 P@ ） 为 真 ． 
解 命 题 以 O) 是 “ 若 a 。 》 方 0 因 为 = = 1 ， 条 件 语 句 “ 若 a 则 ” 的 结 论 
为 真 ． 从 而 条 件 语 句 P(O) 为 真。 这 是 早 月 ． 证 明 法 的 一 个 例 子 · 沣 意 在 这 个 证 明 里 不 需 要 前 提 ， 它 
是 语 句 ％ > 。 
0 

一个定理和证明策略

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image059.png

例 7 证 明 两 个 有 理 数 的 和 是 有 理 数 ． （ 注 意 ， 如 果 这 里 包 括 含 量 词 ， 这 个 定 呷 我 们 想 证 明 《 
“ 对 于 任 意 的 实 数 ， 和 “ 如 果 ， 和 、 是 有 理 数 ， 则 "+ 是 有 理 数 0 
解 首 先 尝 试 直 接 证 明 ． 假 设 ， 和 ， 是 有 理 数 ． 由 有 理 数 的 定 义 ， 可 知 存 在 整 数 》 和 
（ q 关 0 ） 使 得 ， 冖 0 匆 ， 存 在 整 数 ， 和 “ 的 使 得 ， = ， ／ “ @ 我 们 能 用 这 个 信 息 证 明 r + 、 是 
有 理 数 吗 ？ 很 显 然 ， 下 一 步 是 相 加 ， = p 而 和 ， = ' / 得 到 
因 为 4 0 且 所 以 “ 笋 0 · 因 此 ， r + 騙 已 经 被 表 示 为 两 个 幣 数 》 “ 十 和 “ 的 比 ， 其 中 
“ 才 六 这 表 示 r 十 、 是 有 理 数 。 我 们 已 经 完 成 了 两 个 有 理 数 的 和 是 有 理 数 的 证 明 ， 直 接 证 明 成 
0 

归谬法的证明和反证与归谬的转化

* 归谬法证明的例子：

例 10 通 过 给 出 归 谬 证 明 来 证 明 ； 、 厄 是 无 理 数 
解 设 是 命 题 “ 是 无 理 数 ” 。 假 定 0 为 真 · 从 归 謬 证 明 开 始 ， 假 定 0 为 真 。 注 意 口 p 我 示 
“ 并 非 、 0 是 无 理 数 ” ， 这 就 是 说 是 有 理 数 ． 我 们 将 要 证 明 0 户 为 真 的 假 设 导 致 矛 盾 ． 
如 果 龙 是 有 理 数 ， 则 存 在 整 数 “ 和 心 满 足 、 0 一 心 ， 其 中 a 和 心 没 有 公 因 子 （ 所 以 分 数 方 是 既 
约 的 以 这 里 用 到 了 事 实 ： 每 个 有 理 数 都 能 写 成 既 约 分 数 ） ， 因 为 = “ ， 所 以 当 这 个 等 式 的 两 端 
都 平 方 时 ， 就 得 出 2 冖 / · 因 此 ， 2 = 
根 据 偶 数 的 定 义 ， 则 是 是 偶 数 。 下 边 应 用 事 实 （ 练 习 10 《 若 是 是 偶 犜 ， 则 在 也 一 定 是 偶 数@ 
另 外 ， 因 为 “ 是 偶 数 ， 山 偶 数 的 定 义 ， 所 以 对 某 个 整 数 “ 有 “ 亠 2 “ 因 此 2 - 
等 式 两 边 除 以 2 得 ： 一 机 
山 偶 数 定 义 ， 这 意 味 着 是 偶 数 · 再 应 用 事 实 ： 如 果 一 个 整 数 的 平 方 是 偶 数 ， 那 么 这 个 數 自 
身 也 一 定 是 偶 数 。 因 此 ， 我 们 得 出 b 也 必 然 是 偶 数 · 
现 在 ， 已 经 证 明 假 设 。 0 导 致 等 式 = ath ， 其 中 。 和 心 没 有 公 因 子 ， 但 a 和 都 是 偶 数 ， 也 就 
是 说 2 整 除 a 和 氕 注 意 到 命 题 = 。 ， 其 中 和 心 没 有 公 因 子 ， 实 际 上 意 味 着 2 不 能 整 除 a 和 
由 于 对 。 的 假 设 寻 致 2 整 除 a 和 b 与 2 不 能 整 除 “ 和 b 矛 盾 ， 。 一 定 是 假 的 。 也 就 是 说 ， 命 题 
狲 “ 是 无 理 数 " 是 真 的 · 我 们 完 成 了 证 明 是 无 理 数 ． 

* 反证法转换为归谬法：

例 11 给 出 定 理 “ 若 3 n 十 2 是 奇 数 ， 则 ” 是 奇 数 ” 的 归 谬 证 明 @ 
解 假 定 表 不 “ 3 ” 斗 2 是 奇 数 ” ， 0 表 示 “ ” 是 奇 数 0 为 啕 造 归 谬 证 明 ， 假 设 》 和 0 q 都 为 真 ． 
也 就 是 假 设 3 ” + 2 是 奇 数 而 ” 不 是 奇 数 ． 因 为 ” 不 是 奇 数 ． 所 以 ” 是 偶 数 ． 按 照 在 例 3 解 答 里 步 
（ 归 谬 证 明 ） ， 可 以 证 明 若 ” 为 偶 数 则 3 ” + 2 是 偶 数 ． 首 先 因 为 “ 偶 数 ， 存 在 整 数 玉 使 得 一 以 ． 这 
意 味 着 3 ” + 2 一 3 （ (k) + 2 一 + 2 一 2 （ 3 + 1) · 山 于 3 ” + 2 是 2 ' ， 这 里 ' 一 + 1 ， 3 “ + 2 是 偶 数 · 注 
意 到 。 表 示 “ 3 ” + 2 是 偶 数 ” ， 因 为 一 个 整 数 是 偶 数 当 且 仅 当 它 不 是 奇 数 · 由 于 设 庐 和 0 都 为 真 ， 
得 出 一 个 子 盾 式 ， 这 完 成 了 一 个 归 谬 证 明 ， 证 明 了 如 果 3 “ + 2 是 奇 数 ， 则 “ 是 奇 數 ． 证 毕 · 

等价性证明的例子

例 起 证 明 定 理 “ 整 数 “ 是 奇 数 当 且 仅 当 是 奇 数 六 
= “ · ， 解 这 个 定 理 是 形 如 “ 0 当 且 仅 当 矿 ， 其 中 是 “ ， ． 是 奇 数 " 而 q 是 “ 帚 是 奇 數 " · （ 通 常 不 
明 确 地 处 理 为 全 称 量 化 0 为 了 证 明 这 个 定 理 ， 需 要 证 明 尹 艹 q 和 q 一 ． 都 为 真 · 
已 经 证 明 了 （ 在 例 1 里 ） 少 ～ q 为 真 且 旷 - 为 真 （ 在 例 5 里 )• 
因 为 已 证 明 了 少 - q 和 q 一 - p 都 为 真 ， 所 以 敕 已 经 证 朋 了 这 个 定 理 为 真 ． 
0 

**SUMMARIES**

1. 证明导论与专业术语。
2. 定理陈述和证明定理的方法。
3. 证明中的错误。

Chapter1-7. 证明的方法和策略

2019年3月22日

8:57

**NOTE TAKING AREA**

穷举证明和分情形证明

* 分情形证明的基本原理：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image064.png

* 分情形证明要覆盖定理中出现的所有可能情况。
* 穷举证明：有些定理能够通过有关的小数量例子测试来证明
* 不失一般性（WLOG）：如果没有另外的证据要求证明其他指定的情形，可通过证明定理的其中一种情况，其他的一系列情况通过简单的变化来论证。
* 穷举证明和分情形证明的常见错误：例子未涉及全部情况。

存在性证明

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image065.png
  + 构造性的存在性证明：找出一个使得P(a)为真的元素a。
  + 非构造性证明：使用归谬证明，证明该存在量词化的否定式蕴含着矛盾。

唯一性证明

* *一些定理断言具有特定性质的元素唯一存在。*
  + 证明有某个元素具有这个性质，且没有其它元素有此性质。
  + 存在性：证明存在某个元素x具有期望的性质。
  + 唯一性：证明若y≠x，则y不具有期望的性质。
    - 也可以证明如果x和y都具有期望的性质，则x=y。
* 注意，证明存在某个唯一元素x等同于证明语句：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image066.png

证明策略

* 前推和后推：
  + 前推：直接证明从假设开始，利用假设、公理和已知定理，用导向结论的一系列步骤来构造证明。
  + 间接证明从假设的否定开始，用一系列步骤得出前提的否定。
* 改造现有证明：现有的证明时常适合于证明一个新结果。

证明策略：填充

* 棋盘：一个由水平和垂直线分成同样大小方块组成的矩阵。
  + 标准棋盘：8行8列的棋盘。
  + 镶板：任意矩形大小的棋盘。
* 骨牌：一块长方形，由两个方格组成。
* 填充：当棋盘的所有方格由不重叠的骨牌覆盖，而没有骨牌悬垂在镶板上。
* 骨牌填充标准棋盘的证明：

例 18 我 们 能 用 骨 牌 填 充 标 准 棋 盘 吗 ？ 
解 我 们 找 到 许 多 用 骨 牌 填 充 标 准 棋 盘 的 方 法 。 例 如 ， 可 以 水 
平 放 32 块 骨 埤 填 充 它 ， 如 图 1 一 4 所 示 ． 这 样 填 充 的 存 在 性 完 成 了 
个 构 造 性 的 存 在 证 明 。 当 怵 ， 做 这 个 煩 充 还 有 大 量 其 他 的 方 法 ． 可 
以 在 板 上 垂 直 放 32 块 骨 牌 ， 或 者 水 平 地 和 垂 直 地 填 充 它 · 但 对 于 一 
个 构 造 性 存 在 证 明 需 要 找 到 仅 仅 一 个 这 样 的 填 充 就 可 以 。 

* 骨牌填充标准棋盘变式的证明：

例 四 我 们 能 填 充 从 标 准 棋 盘 中 去 掉 四 个 角 的 方 格 之 一 得 到 
的 镶 板 吗 ？ 
解 为 了 回 答 这 个 问 题 ， 注 意 一 个 标 准 棋 盘 有 64 个 方 格 ， 去 掉 
一 个 方 块 这 样 由 63 个 方 产 生 一 个 镶 板 · 现 在 假 设 能 够 塤 充 一 个 从 
一 个 标 准 棋 盘 中 去 掉 一 个 角 的 方 格 的 镶 板 。 因 为 每 一 个 骨 陴 盖 住 两 
个 方 格 ， 又 没 有 两 个 骨 牌 重 叠 ， 没 有 骨 牌 悬 垂 在 板 上 ， 所 以 板 上 一 
定 有 偶 数 个 方 格 ， 因 此 ， 可 以 用 归 谬 证 明 法 证 明 云 棹 一 忄 方 格 的 标 准 棋 盘 不 能 用 骨 牌 填 充 ， 因 为 这 
样 一 个 有 奇 数 忄 方 格 。 

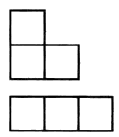
* 骨牌填充去除偶数个方格的标准棋盘：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image069.png

* 无法像例19一样构造简单的证明，使用涂色法，将棋盘每隔一格填充红色或黑色，每个骨牌覆盖一个红色和一个黑色，对于本例的证明如下：

证 假 如 能 用 骨 牌 对 去 掉 两 个 对 的 标 准 棋 盘 填 充 · 注 意 到 去 掉 两 个 对 角 的 标 准 棋 盘 包 含 
〔 4 一 2 一 62 个 方 块 。 它 可 以 用 62 / 2 一 31 个 骨 牌 填 充 · 在 这 个 填 充 中 ， 怎 个 骨 牌 盖 住 一 个 白 的 和 
个 黑 的 方 格 。 因 此 ， 这 个 填 充 盖 住 3 ！ 个 白 的 和 31 个 黑 的 方 格 。 然 而 ， 当 去 掉 两 个 对 甭 方 幣 时 ， 或 
者 保 留 32 块 白 的 ， 30 块 黑 的 · 或 者 保 留 30 块 白 的 、 32 块 黑 的 。 这 驳 斥 了 能 用 骨 牌 覆 盖 去 掉 两 个 
对 角 的 标 准 棋 盘 的 假 没 ， 完 成 证 明 庵 
0 

* 多方块：沿着方块的边来连接构建的具有相同数目全等正方形的块。
  + 直三格板：三个水平连接的正方形。
  + 右三格板：类似于字母L的形状。



* 考虑能否用直三格板填充标准棋盘：

例 你 能 用 直 三 格 板 填 充 标 准 棋 盘 吗 ？ 
解 标 准 棋 盘 含 有 64 个 方 格 ， 每 一 个 三 帑 板 覆 盖 三 个 方 格 。 内 此 ， 如 果 三 格 板 填 充 了 一 个 镶 
板 ， 镶 板 的 方 格 数 量 一 定 是 3 的 倍 数 生 因 为 61 不 是 3 的 倍 数 ， 所 以 三 格 板 不 能 罹 盖 B x 各 棋 盘 ， 
0 

* 更复杂的直三格板问题：

例 22 我 们 能 用 貞 三 格 板 填 允 去 掉 些 个 角 的 任 一 个 角 的 标 准 棋 盘 吗 ？ 一 个 8 × 棋 盘 去 掉 一 个 
角 后 包 含 64 一 ] = 到 个 方 格 。 用 直 过 格 板 填 充 任 一 个 去 掉 一 个 角 的 棋 盘 其 四 种 情 况 的 任 一 柙 情 况 
都 要 用 63 / 3 = 21 个 直 三 格 板 ． 然 而 当 我 们 试 验 时 ． 不 能 找 到 一 个 直 。 格 板 填 充 任 一 个 去 掉 一 个 角 
的 些 种 情 况 的 任 一 种 情 况 · 由 穷 举 证 明 显 示 这 个 没 有 希 望 · 我 们 能 改 例 20 的 证 明 来 证 明 这 样 的 
填 充 不 存 在 吗 ？ 
解 我 们 将 给 棋 盘 的 方 幣 涂 上 0 色 ． 企 图 改 造 在 例 20 给 出 的 门 谬 证 明 法 证 明 ， 应 用 骨 牌 填 充 
去 掉 对 角 的 标 准 棋 盘 是 不 可 能 的 · 因 为 用 百 格 板 而 不 是 骨 牌 我 们 用 0 种 0 色 区 分 方 格 而 不 是 
两 种 颅 色 ， 如 图 卜 7 所 小 ． 注 童 在 这 个 着 色 中 有 21 个 灰 色 方 格 ， 21 个 黑 色 方 格 ， 22 个 自 色 方 
格 、 其 次 ， 做 一 个 市 的 观 察 ， 一 个 貞 三 格 栀 覆 盖 棋 盘 的 三 个 方 格 ， 它 覆 盖 一 个 灰 色 的 、 一 个 黑 
色 的 和 一 个 白 色 的 方 格 ． 然 后 注 意 到 三 个 色 
的 每 一 个 都 出 现 在 一 个 角 的 方 格 中 · 于 是 ， 在 
一 穀 没 有 去 掉 的 时 候 ， 可 以 假 设 轮 换 颜 色 ． 使 
去 掉 的 方 輅 是 灰 色 的 ． 因 此 假 设 留 下 的 板 包 含 
20 个 从 色 方 格 ， 21 个 黑 色 方 格 ， 22 个 白 色 
方格@ 
如 果 能 用 直 三 格 板 填 充 这 块 镶 板 ， 那 么 将 
用 63 丿 3 = 2 ] 个 直 格 板 ． 这 些 直 它 格 板 覆 盖 21 
个 灰 色 方 格 ． 21 个 黑 色 方 格 ， 21 个 白 色 方 格 ． 
这 与 这 个 镶 板 包 含 20 个 灰 色 方 格 ， 21 个 黑 色 
方 格 ． 2 2 个 自 色 方 格 矛 盾 “ 因 此 不 能 用 直 三 格 
板 填 充 这 个 镶 板 ． 
0 
图 1 一 7 
0 
0 
用 三 种 色 对 0 除 对 角 的 标 准 棋 盘 方 着 色 

未解决问题的作用

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image074.png

费 尔 马 大 定 理 只 要 “ 是 满 足 枞 > 2 的 整 数 ， 方 程 
尸 十 矿 亠 
就 没 有 膚 足 ． ryz 笋 0 的 整 数 解 y 和 “ 

**CUE COLUMN**

穷举证明的例子

例 2 证 明 ： 在 跹 0 以 内 ， 连 续 的 正 整 数 是 全 幂 数 的 只 有 8 和 9 〔 全 幂 数 
。 是 大 于 1 的 数 ） 。 
解 可 以 通 过 证 明 在 n < ] 00 时 ， 只 有 一 对 连 续 的 正 整 数 n ， '1+1 它 们 都 是 全 幂 數 来 证 明 这 个 
事 实 ， 即 一 5 时 · 我 们 能 够 证 明 此 事 实 ， 通 过 检 验 在 1 的 以 内 的 正 整 数 狲 首 先 检 查 。 是 否 是 全 
幂 数 ． 如 果 是 ， 检 查 ” 十 1 是 否 也 是 全 幂 数 · 做 这 件 事 最 快 的 方 法 是 简 单 地 看 跹 0 以 内 所 有 的 全 幂 
数 ， 检 查 是 否 它 下 一 忄 人 的 整 数 也 是 全 幂 数 · 100 以 内 正 整 数 的 平 方 有 1 、 4 、 9 、 16 、 25 、 3 巛 、 
64 、 81 和 1 〕 0 · 1 佣 以 内 正 整 数 的 立 方 有 1 、 8 、 2 7 和 64 。 1 的 以 内 正 整 数 的 1 次 幂 有 以 15 和 8 
100 以 内 正 整 数 的 5 次 幂 有 1 和 3 乙 100 以 内 正 整 数 的 5 次 幂 有 1 和 54 · 除 了 1 以 外 ， 100 以 内 没 
有 正 整 数 的 6 次 幂 大 于 6 次 。 观 察 不 起 过 ] 00 的 一 系 列 全 幂 数 ， 发 现 只 有 - 8 时 ， ” 是 全 幂 数 ， 
而 n 十 1 也 是 全 琴 数 。 即 2 》 -8 ， 3 ， 一 9 ， 是 100 以 内 唯 一 两 个 连 续 全 幂 数 · 证 毕 · 

分情形证明的例子

例 4 用 分 情 形 证 明 法 证 明 《 “ 
《 工 凵 y 《 ， 其 中 和 ， 是 实 数 · 0 “ 《 是 生 的 绝 对 值 · 
当 a 0 时 ， 《 。 1 
a; 当 时 ， 《 a 《 = —a 
解 在 个 走 埤 的 证 明 中 ． 用 事 实 ， 当 。 0 时 ， 《 a 《 亠 当 a 《 0 时 · 《 a 1 = 一 宀 消 除 
绝 对 偵 · 由 十 》 丆 《 和 》 ， ] 两 个 在 公 式 中 ， 将 要 分 成 四 种 情 ： （ i )x 和 ， 都 非 负 ； (ii)x 非 
负 ， ， 是 的 ： （ 111 是 負 的 ， y 菲 负 ； （ iv 后 是 负 的 ． ， 是 负 的 · 
（ 注 意 ， 我 们 诎 讨 每 一 种 情 况 的 恰 当 的 符 号 选 择 实 拉 绝 对 值 符 号 0 
情 况 （ i ） 載 们 看 到 灬 佑 因 为 当 > 0 且 ， 0 时 0 0 ， 因 此 《 》 = ． 》 Ily ] 
情 00 要 证 明 仍 一 · q ， 注 童 若 0 且 ， < 0 ， 0 < 0 ． 因 此 《 “ 《 ： 一 一 」 区 一 ， ） 一 
] 0 ， 《 0 因 为 ， < 我 们 有 》 ， 《 
情 况 （ ） 要 证 朗 一 ， 可 遵 前 一 种 情 形 的 推 理 过 程 ， 只 需 将 和 ， 的 角 色 互 换 · 
t"(iv) 要 证 明 艹 枷 注 当 < 0 且 ， < 0 时 ， ， > 0 ． 因 此 1 xyl = 0 = （ 一 ） （ 一 ， 〕 一 
因 为 已 释 完 成 了 所 有 的 四 项 ， 这 些 情 况 包 含 了 所 有 的 可 能 情 况 ． 能 够 得 结 论 当 立 和 ， 是 实 

不失一般性的例子

例 7 证 明 ： (x+y)'<x'+y'. 这 里 r 、 ， 是 正 实 数 ， ， 是 0 < ， < 1 的 实 数 “ 
解 
不 失 一 般 性 ． 假 设 丆 + ， 一 1 ． [ 注 意 《 假 设 对 于 + ， 一 1 已 经 证 明 了 定 理 ． 设 + ， 一 
那 么 + ， / ' = 1 ， 这 意 昧 着 （ x ／ ' + 影 t) ' < （ 到 t) ' + 0 ／ t) ' ． 最 后 式 子 两 边 乘 以 了 ， 证 得 （ + ， ） ' < 
假 设 + ， = 1, 因 为 x 、 ， 都 为 正 ， 所 以 0 < < 1 ， 0 < ， < 1 ． 因 为 0 < ， < 1 ， 因 此 ， 0<1—r< 
十 ， 气 这 样 对 于 m + ， = 1 证 明 了 定 理 ． 
因 为 不 失 一 般 性 ， 我 们 假 设 + ， = 1 ， 得 到 + y ） ' < + 矿 这 里 工 、 ， 是 正 实 数 ， r 是 0 < 
， < 1 的 实 数 · 
0 

错误的穷举和分情形证明

例 8 语 句 “ 每 个 正 整 数 都 是 18 个 四 次 方 幣 数 之 和 " 足 否 为 真 ？ 
解 要 判 断 是 否 可 写 为 吓 个 四 次 方 整 数 的 和 ， 我 们 先 从 最 小 的 正 整 数 开 始 考 察 。 因 为 整 数 
， 如 果 能 从 这 些 数 中 选 择 ] 8 个 项 后 相 加 得 “ ， 则 命 题 得 证 · 可 
的 四 次 方 分 别 是 0 ， 1 ， 16 ， 81' 
以 证 明 ， 从 [ 到 的 所 有 止 整 数 都 可 以 写 戊 18 个 四 次 方 整 数 的 和 （ 细 节 留 给 读 者 证 明 )• 然 而 ， 如 
果 认 为 这 就 检 查 够 了 ， 那 就 会 得 出 错 误 的 结 论 ， 因 为 79 并 不 是 18 个 四 次 方 整 数 的 和 〈 读 者 请 自 行 
验 证 所 以 ， 题 设 语 句 不 为 真 。 
0 

* 该例中没有测试全部的数据。

非构造性的存在性证明

例 Il 非 构 造 性 的 存 在 性 证 期 证 明 存 在 无 理 数 工 和 ， 使 得 尸 是 有 理 数 。 
解 由 1.6 节 例 沁 可 知 是 无 理 数 ， 考 虑 敵 飞 如 果 它 是 有 理 数 ， 那 就 存 在 两 个 无 理 数 工 
和 y 且 丆 ' 是 有 理 数 ， 即 x 一 、 0 ， ， 一 靼 · 另 一 方 面 ， 如 果 力 、 f 是 无 理 数 ， 那 么 可 以 令 上 ． 办 且 ， 一 
， 因 此 尹 一 （ ， 声 一 艹 加 一 《 一 2 · 
这 是 一 个 祚 构 造 性 存 在 性 证 明 的 例 了 ， 即 我 们 并 没 有 找 出 无 理 数 和 ， 使 得 是 有 理 数 ． 而 我 们 
证 明 了 或 者 ： ， ： ， 或 者 丆 一 、 。 y—u. 可 能 满 足 性 ， 但 并 不 知 道 两 对 哪 一 个 满 足 ， 

唯一性证明的例子

例 13 证 明 ： 如 果 b 是 实 数 ， 并 且 a 笋 0 ， 那 么 有 一 个 唯 一 的 。 使 得 艹 + 心 一 伍 
解 首 先 ， 注 意 到 实 数 r 
一 “ 是 “ + 心 一 0 的 一 个 解 ， 因 为 一 0 ' 的 十 方 亠 一 到 勖 一 0 。 因 
此 ， 对 于 “ + -0 实 数 ， 是 存 在 的 。 这 是 证 明 的 存 在 性 部 分 。 
宀 ， ， 其 次 ， 假 设 ， 是 “ ， + 心 一 0 成 立 的 实 数 · 因 此 “ ． 画 一 “ + 
这 里 ， 一 一 “ 从 两 边 减 
去 标 得 到 “ 一 - · 最 后 式 子 两 边 同 除 以 “ ， 这 里 “ 是 非 零 的 ， 得 到 ， 一 ， · 这 意 味 着 如 
果 ， 弊 ， ， 则 “ ， + b 的 0 。 这 建 立 了 证 明 的 唯 一 性 部 分 。 
0 

未解决问题的例子

23 3 攴 + 1 磧 想 设 不 到 是 把 偶 数 工 转 换 成 ／ 2 、 把 奇 数 丆 转 换 成 缸 十 1 的 变 换 。 
有 个 著 名 的 猜 想 （ 有 时 称 为 3r + 1 猜 想 〕 说 ： 对 所 有 正 整 数 味 说 ， 当 反 复 地 应 用 变 換 
T 时 ， 最 终 会 得 到 整 数 例 如 ， 从 上 = 13 开 始 ， 发 现 T （ 13 ） = 3 · 13 十 1 = 40 ， T （ 10 ） = 40 / 2 = 20 ， 
T( 2 的 = 20 ／ 2 = 10 ， T （ 10 ， = 1 射 2 亠 5 ， T( 5 ） 亠 3 · 5 + 1 = ] 6 ， T （ 16 ） = 8 ， 1 ． （ 5 ） = 4 ， T( 4 ） = Z ， 
丁 （ Z ） 亠 1 。 对 于 直 到 5 、 6 · 10 ” 的 所 有 椰 数 都 验 证 了 3 歹 十 1 猜 想 · 
缸 + ] 猜 想 具 有 有 的 历 史 ． 从 20 世 纪 50 年 代 以 来 就 吸 引 了 数 学 家 们 的 注 意 力 ． 这 个 猜 想 被 
多 次 提 出 ， E! 有 许 多 其 他 名 栋 ， 包 括 ， CollatzrnJE. 山 艹 算 法 、 U 后 m 回 老 、 Syracuse 同 题 以 及 
Kakutarurnlß 等 ． 许 多 数 学 家 廾 原 有 工 作 来 花 时 间 解 决 这 个 猜 想 。 这 引 起 一 则 笑 话 ， 说 这 个 同 
是 旨 在 减 缓 美 国 数 学 餅 究 的 谭 的 一 部 分 · Wh!Jeffrey 后 咿 小 的 文 章 L 上 5 」 来 了 解 对 这 个 同 题 
有 思 的 讨 论 以 及 试 图 解 决 这 个 同 韪 的 数 学 家 们 所 发 现 的 结 果 ． 
0 

**SUMMARIES**

1. 穷举证明和分情形证明及其错误的方式。
2. 存在性证明的构造性和非构造性。
3. 唯一性证明的存在性和唯一性。
4. 证明策略：前推和后推。
5. 证明策略的实例：填充问题。
6. 未解决问题及其作用。

Chapter2-1. 集合

2019年3月23日

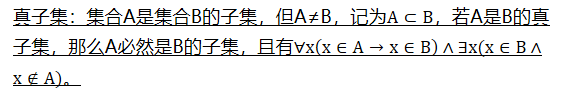
10:14

**NOTE TAKING AREA**

集合引言和基本定义

* **定义1** 集合是一组无序的对象。
  + 这称为朴素集合理论的原始描述，罗素提出了该直观定义的悖论，以公理的基本假设为起点建立集合理论可以避免悖论。
* **定义2** 集合中的对象也称为该集合的元素、或成员。集合包含它的元素。
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image083.png
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image084.png
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image085.png

证 这 里 旺 明 （ D ， （ 的 留 作 习 题 。 
令 5 为 一 个 集 合 · 为 了 证 明 s ， 必 须 证 明 行 e 必 一 r 〔 S) 为 真 ， 因 为 空 集 没 有 元 素 ， 所 
以 丆 eØ 总 是 假 · 因 此 eø 一 · 工 es 总 是 真 ， 因 为 其 假 设 为 假 ， 并 且 具 有 假 的 假 设 的 条 件 语 句 为 
真 · 即 以 eø 一 上 es ） 为 真 。 这 完 成 了 (i) 的 证 明 。 这 是 空 证 明 的 示 例 。 

* 
* **定义5** 令S为集合。若S中恰有n个不同的元素，其中n是非负整数，就说S是**有限集合**，而n是S的**基数**，记为|S|。
* **定义6** 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

幂集合

* **定义7** 已知集合S，S的幂集合是集合S所有子集的集合，记为P(S)。
* 幂集合的一个例子：

计算机生成了可选文字:
例13集合{0，1，的幂集合是什么？
解幂集合P()0，1，2}）是{0，[，引所有子集的集合。因此
注意，空集和{0，1,2》自身都是这个子集集合的成员。

笛卡儿积

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image089.png
  + 只有在两个有序n元组每一对对应的元素都相等时，他们才相等。
  + 二元组特称为**有序偶**。
* **定义9** 令A和B为集合。A和B的笛卡儿积用A×B表示，是所有有序偶(a,b)的集合，其中a∈A而b∈B，有：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image090.png

* 笛卡儿积A×B的子集R称为从集合A到集合B的关系，R的元素是有序偶，其中第一个元素属于A，第二个元素属于B。
* **定义10** 集合A1，A2，…，An的笛卡儿积用A1×A2×…×An表示，这是有序n元组(a1，a2，…，an)的集合，其中：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image091.png

集合符号的量词与量词的真值集合

* 集合的全称量化与存在量化：

例 19 语 句 eR(: 过 彡 叻 和 eZ （ 一 1) 的 含 义 是 什 么 ？ 
解 语 句 éR （ 彡 四 声 称 对 任 意 实 数 “ 驴 0 。 这 忄 语 句 可 以 表 达 为 “ 任 意 实 数 的 平 方 是 
非 负 的 ” ． 这 是 真 语 句 ． 
语 句 血 （ 尹 - l) 声 称 存 在 一 个 整 数 使 得 过 = 1 。 这 个 语 句 可 以 表 达 为 “ 有 某 个 整 数 ， 其 平 
方 是 。 这 个 语 甸 也 是 真 语 旬 ， 因 为 ． r 冖 I 就 是 这 杆 一 个 整 数 （ 一 ] 也 是 

* 量词的真值集合：给定谓词P和论域D，P的真值集合为D中元素x使P(x)为真的元素组成的集合，记为：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image093.png

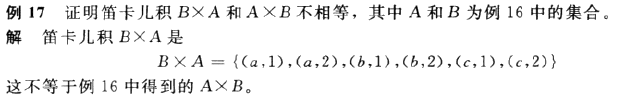
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image094.png
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image095.png

**CUE COLUMN**

笛卡儿积的例子

僅 A { 1. 2 } 和 B = 《 宀 c} 的 凿 卡 几 积 是 什 么 ？ 
解 笛 卡 几 积 × B 是 

笛卡儿积不满足交换律



多个集合的笛卡儿积

1), в—п, 2', с=40. 1, 
Я iX—tA ь, МЛ „ел, ьев, сес. 

**SUMMARIES**

1. 集合引言与基本定义。
2. 幂集合。
3. 笛卡儿积。
4. 集合符号的量词与真值集合。4

Chapter2-2. 集合运算

2019年3月24日

9:22

**NOTE TAKING AREA**

集合运算的基本概念

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image099.png
  + 元素x属于A和B的并集当且仅当x属于A或x属于B：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image100.png

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image101.png

计算机生成了可选文字:
元素．属于集合A和B的交集当且仅当．r属于A而且属于B。这说明
AnB=00e為AxeB)

* **定义3** 如果两个集合的交集为空集，就说他们不相交。
  + 推广到多个集合的并集，得到包含排斥原理（容斥原理）。
* **定义4** A和B的差集用A-B表示，包含只属于A不属于B的所有元素的集合，A和B的差集也称为B对于A的补集。

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image103.png

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image104.png

元 素 属 于 当 且 仅 当 ． 4 。 这 说 明 

集合恒等式

ΑΙ.ΙΙ'—υ 
Α •—ΙΑ—Α 
ΑΙ-Ι4—Ι) 

扩展的并集和交集

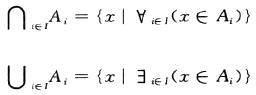
* 一组集合的并集是至少存在于集合中一个成员集合的元素的集合：

计算机生成了可选文字:
AUA:U“·U：UA,

* 一组集合的交集是存在于全部集合成员中元素的集合：

计算机生成了可选文字:
Alnn．灬n一0

* 扩展并集和交集的记号：



**CUE COLUMN**

并集的例子

例 1 集 合 { 1 ， 3 ， 分 和 集 合 0 ， 2 ， 3 》 的 并 集 是 集 合 口 ， 2 ， 3 ， 5 } ， 即 
{ 1 ， 3 ， u { 1' 2 ， 3 》 - 0 ， 2 ， 3 ， 5 } 
例 2 学 校 主 修 计 算 机 科 学 的 学 生 集 合 与 主 数 学 的 学 生 集 合 的 并 集 ， 是 或 主 修 数 学 或 主 修 计 
算 机 科 学 或 同 时 主 修 这 两 门 课 的 学 生 的 集 合 。 
0 

交集的例子

例 3 集 合 0 ， 3 ， 到 和 ： 六 2 ， 3 卜 的 交 集 是 《 1 ， 3 》 ， 即 {l ， 3 ， 5 》 n (1 ， 2 ， 3 》 = ， 3 
例 4 学 校 所 有 主 慷 计 算 机 科 字 的 字 生 集 合 与 所 有 主 修 数 学 的 学 生 集 合 ， 是 所 有 既 主 悔 计 算 机 
科 学 又 主 修 数 字 的 字 生 的 集 合 。 
0 

证明德摩根第二定律

例 旧 证 WIA[ÄB=ÄIJB. 
“ 解 为 了 证 明 一 我 们 需 要 证 明 AßlBGÄU 力 和 ÄIJ 力 API · 
首 先 ． 证 明 為 n 月 · 假 定 reAP.B, 根 据 补 的 定 义 ， re-A[ÄE. 由 交 的 定 义 ， 
0 （ 0 ． €A 〕 ^ 行 eB 月 为 真 ， （ 由 逻 辑 } 用 德 摩 定 律 可 得 00r0 、 4 ） 或 。 （ ． reB). 因 此 ． 根 据 否 定 
的 定 义 ， 有 硭 A 或 硭 ， 冉 由 补 的 定 义 ， 丆 e 氕 或 0 月 ； 再 由 并 ． e A IJ 月 ， 因 此 ， 得 证 
AtlBCÄlJD. 
然 后 ， 证 明 ÄUBG.A(ÄB. 现 设 eÄlJ ： 由 并 的 定 又 ． 用 补 的 定 义 ， 
A 或 ： 所 以 ， 。 （ 丆 e 月 ） V(xeB ） 为 真 ． （ 由 逻 辑 ） 用 德 摩 根 定 律 可 得 ， 0 （ re ） ^ 〔 B ） 为 
真 ． 由 交 的 定 义 ， 。 CAI-I 成 立 ； 山 袢 的 定 义 ， Ehrz-A()B ， 这 表 明 ÄI_J ． 由 于 已 证 
明 这 两 个 集 合 中 ， 一 个 是 另 一 个 的 了 集 ， 所 以 ， 这 两 个 集 合 和 等 ， 即 得 证 恒 等 。 

扩展集合的例子

例 17 
对 于 i = 
， 2 ， 3 ， 
， 集 合 A = { l, 
口 六 一 U {1 ， 2 ， 3 。 
一 0 ， 2 ， 3 ， 
n ： 口 《 1 ， 2 ， 3 ， 
可 以 看 到 ， 这 些 集 合 的 并 集 是 正 整 数 集 ， 每 一 个 正 整 数 至 少 属 于 一 个 集 合 ， 因 为 整 数 ” 属 于 
， 司 ， 并 集 中 的 每 一 个 元 素 都 是 正 整 数 。 注 意 到 属 于 所 有 的 集 合 的 元 牽 只 有 1 ， 即 
这 些 集 合 的 交 集 。 也 就 是 说 ， A 《 = 0 } ， 而 且 IGA,(i = 吓 2 ， 

**SUMMARIES**

1. 集合运算的基本概念。
2. 集合恒等式。
3. 扩展的并集和交集。

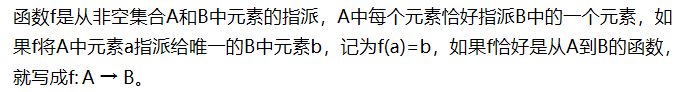
Chapter2-3. 函数

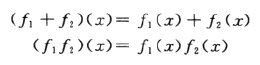
2019年3月26日

8:15

**NOTE TAKING AREA**

函数的定义与引言

* 
  + 函数也称为**映射**或者**变换**。
* 令f为从A到B的函数，则A是f的**定义域**，B是f的**伴域**，若f(a)=b，则b是a的像，a是b的原像，A中元素的所有像元素的集合称为f的**值域**。
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image115.png



* 令f为从集合A到集合B的函数，S为A的一个子集，S的像是由S中元素的像组成的B的子集，记为f(S)：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image117.png

一对一函数和映上函数

* 一对一函数：当且仅当对于f的定义域中的所有a和b，f(a)=f(b)蕴含着a=b，一对一函数称为单射的。
  + 证明一对一函数：当且仅当a≠b就有f(a)≠f(b)。
* 递增函数f：对定义域中的x和y，只要x＜y就有f(x)≤f(y)，反则递减。
  + 严格递增：对于x和y，若x＜y则f(x)＜f(y)。
* 满射（映上）函数f：当且仅当对于每个b∈B，有元素a∈A使得f(a)=b。

注 意 如 果 彐 云 不 刁 ： ， ） ， 函 数 丆 就 是 映 上 的 ， 其 中 丆 的 论 域 是 函 数 的 定 义 域 ， ， 的 
论 域 是 函 数 的 伴 域 。 

* 对于一对一的映上函数f，则称它是一一对应或者双射的。

反函数和函数组合

* f为集合A和集合B的一一对应函数，f的反函数为指派给B中元素b的是A中使得f(a)=b的唯一元素a，记为f-1。
  + 若函数f不是一一对应的，则无法定义反函数。
  + 一一对应关系称为可逆的，非一一对应关系称为不可逆的。
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image119.png

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image120.png

* 反函数与组合函数的关系：

q= 冖 n)f ((Q)I-J)J— (q) 冖 JOY) 

函数的图像

* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image122.png
* C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image123.png

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image124.png

**CUE COLUMN**

函数和定义域、伴域、值域

例 1 引 用 本 节 开 头 的 例 子 ， 给 学 生 打 分 来 描 述 什 么 是 函 数 的 定 义 域 、 伴 域 、 值 域 。 
解 令 G 为 丞 数 ， 表 示 在 离 散 数 学 课 上 一 个 学 生 的 得 分 ， 例 如 G(Adams)=A0 则 G 的 定 义 域 
是 集 合 Adams ， Chou ， Goodfriend ， Rodriguez ， Stevens} ， 伴 域 是 集 合 { A ， B ， 0 D ， F}, G 的 
值 域 是 {A ， 月 ， C ， F} ， 因 为 没 有 学 生 得 D ， 
0 
例 2 令 R 为 包 含 有 序 对 （ Abdul ， 22 ） ， (Brenda ， 24 ） ， (Carla ， (1) ， (Desire ， 22 ） ， (Eddie ， 
24） 和 (Felicia ， 22 ） 的 一 个 关 系 ， 每 一 对 表 示 一 个 学 生 的 得 分 及 其 年 龄 ， 那 么 ， 该 关 系 R 确 定 的 函 
数 是 什 么 ？ 
解 这 个 关 系 定 义 了 孓 数 歹 ， 有 f(Abdul)—22, f(Brenda)=24. f(Carla)=21. f(Desire)—22, 
不 Ed 山 e ） 24 ， f(Felicia) =Z20 在 这 里 ， 定 义 域 是 《 Abd 冚 ， Brenda ， Carla ， Desire, Eddie, Felicia}. 
为 了 定 义 丞 数 不 需 要 指 定 一 个 伴 域 ， 我 们 可 以 把 正 整 数 作 为 伴 域 以 釀 保 包 含 每 一 个 学 生 可 能 的 年 
於 （ 注 意 ， 可 以 选 择 小 一 点 的 伴 域 ， 但 是 这 会 改 变 数 ） ， 最 终 值 域 是 集 合 { 21 ， 22 ， 24 } 。 
0 

* 程序语言定义的函数

例 5 函 数 的 定 义 域 和 伴 域 往 往 以 程 序 语 言 描 述 。 例 如 Ja “ 语 句 
int floor( o real) ） { ． 
和 Pascal 语 句 
function floor(x:real):integer 
都 说 的 是 ， fl 閃 r 丞 数 的 定 义 域 是 实 数 集 合 ， 而 它 的 亻 半 域 是 整 数 集 合 。 

组合函数的例子

例 6 令 丆 和 尢 是 从 R 到 R 的 函 数 ， 且 美 （ ． r ） 一 分 而 歹 这 到 ： 工 一 气 数 不 十 荪 和 岙 是 
什 么 ？ 
解 从 函 数 的 和 与 积 的 定 义 知 
若 歹 是 从 集 合 A 到 集 合 B 的 承 数 ， 则 可 以 定 义 月 的 子 集 的 像 。 

一对一函数

例 8 判 断 从 ， 「 ， 的 到 0 ， 2 ， 3 ， 1 ， 5 } 的 数 歹 是 否 为 一 对 一 的 ， 了 的 定 义 是 
丆 （ 的 一 耘 丆 （ 仞 = 5 ， 丆 （ = ] 而 不 d ） = 3 · 
必 ， 解 是 一 对 一 的 ， 因 为 歹 在 它 定 义 域 的 四 个 元 素 上 取 不 同 的 值 。 图 2 
一 10 说 明 了 这 
例 9 判 断 从 整 数 集 合 到 数 集 合 的 函 数 不 到 = 是 否 为 一 对 
解 函 数 不 一 不 是 一 对 一 的 ， 因 为 ， 例 如 不 1 ） 一 不 一 1) 一 
1 ， 但 1 一 
注 意 ， 若 定 义 域 限 制 为 Z ， 数 ． 到 一 就 是 一 对 一 的 · 
（ 技 术 上 说 ， 当 限 定 一 个 函 数 的 定 义 域 的 时 候 ， 我 们 得 到 了 一 个 新 
的 正 数 ， 被 限 制 的 元 素 的 值 域 与 原 来 是 相 同 的 ， 而 被 限 制 的 定 义 域 
以 外 的 原 来 定 义 域 的 元 素 就 不 被 限 制 的 函 数 定 义 了 0 
0 
图 2 一 10 
一 个 一 对 一 函 数 

映上函数和非映上函数

例 1 1 今 丆 为 从 ， b ， 。 到 0 ， 2 ， 3 } 的 函 数 ， 其 定 义 为 不 = 3 ， 的 （ 们 = 2 ， 然 园 = 1 及 
然 的 = 3 。 歹 是 映 上 函 数 吗 ？ 
解 由 于 伴 域 中 所 有 3 个 元 素 均 为 定 义 域 中 元 素 的 像 ， 丆 是 映 上 的 。 图 2 一 1 1 说 明 了 这 
一 点 。 注 意 ， 若 伴 域 是 0 ， 2 ， 3 ， 4 } ， f 就 不 是 映 上 的 。 
例 12 从 整 数 集 到 整 数 集 的 数 不 到 一 是 映 上 的 吗 ？ 
解 丆 不 是 映 上 的 ， 因 此 ， 比 如 说 没 有 使 射 
例 ] 3 从 整 数 集 到 整 数 集 的 数 不 到 一 工 + 1 是 映 上 的 吗 ？ 
0 
0 
解 这 个 函 数 是 映 上 的 ， 因 为 对 每 个 整 数 ” 都 有 一 个 熬 数 ． r 使 不 ． r ） 
=yo 为 看 出 这 一 点 ， 只 要 注 意 不 到 = ， 的 允 分 必 要 条 件 是 泌 + I = 弘 而 
这 只 要 令 r = ， 一 1 就 成 立 。 

反函数和可逆函数

如 果 可 逆 ， 其 反 函 数 是 什 么 ？ 
以 丿 一 《 （ D = “ 丆 ． 气 2 ） 一 “ 而 7 一 I 〔 3 ） 
亠 b 。 
例 17 今 ． 0 Z—Z, 使 得 丿 ℃ 刁 一 工 + 1 · 丆 珂 逆 吗 ？ 如 果 可 逆 ， 其 反 数 是 什 么 ？ 
例 16 今 丆 为 从 ， 园 到 0 ， 2 ， 3 》 的 函 数 ， 使 不 亠 2 ， 歹 仂 ） = 3 及 不 = 1. 歹 可 逆 吗 ？ 
解 了 是 可 逆 的 ， 因 为 它 是 一 个 一 对 一 的 对 应 关 系 。 其 反 丞 数 厂 》 顛 倒 丿 ． 给 出 的 对 应 关 系 ， 所 
0 
解 丆 可 逆 ， 因 为 前 血 已 证 明 它 是 一 一 对 应 关 系 。 要 能 倒 对 应 关 系 ， 设 ， 是 工 的 像 ， 即 y= 
工 ． 卜 1 。 从 而 泌 一 y 一 1 。 即 ） 一 1 是 Z 的 唯 一 元 素 ， 在 丆 之 下 与 ， 对 应 ， 于 是 0 气 劝 一 ， 一 
0 
例 18 令 丆 是 从 R 到 R 的 函 数 ， 使 歹 （ 到 = 。 丿 、 可 逆 吗 ？ 
解 由 于 一 2 ） ： 不 2 ） 一 4 ， f 不 是 一 对 一 的 ， 要 想 定 义 反 数 ， 就 得 为 4 指 派 两 个 元 素 · 因 
此 歹 是 不 可 逆 的 。 

组合函数的例子

例 20 
令 g 为 从 ， 0 到 它 自 己 的 函 数 ， 使 一 标 g(b)=c, 而 〔 ） 一 a 。 令 了 为 从 { a ， 
0 到 0 ， 2 ， 3 } 的 函 数 ， 使 不 a ） 一 3 ， ． 八 ： 2 ， 而 不 0 一 1 。 ． 和 的 组 合 是 什 么 ？ g 和 丆 的 组 
合 是 什 么 ？ 
注 意 g 。 丆 是 没 有 定 义 的 ， 因 为 丆 的 值 域 不 是 g 的 走 义 域 的 一 部 分 。 
0 
例 21 令 丆 和 g 为 从 整 数 集 到 整 数 集 的 丞 数 ， 其 定 义 为 不 一 + 3 和 一 3 + 2 。 丿 ． 和 
的 组 合 是 什 么 ？ g 和 歹 的 组 合 是 什 么 ？ 
解 丆 以 和 粼 过 ． 均 有 定 义 ， 即 
及 
注 意 
（ 了 ． 。 g ） （ ） = 不 g （ ） 〕 ： 不 3 ． r + 2 ） = 2 （ 3 泌 十 2 ） + 3 = 6 丆 十 7 
(gof)(x) = g （ 尸 ） ） = （ 2x + 3 〕 = 3 （ 2 工 + 3 ） + 2 一 6 + 11 
0 
尽 管 例 21 中 对 函 数 丆 和 g 而 言 ． 0 & 和 & 。 丆 均 有 定 义 ， 歹 。 和 g 。 了 并 不 相 等 ． 换 
言 之 ， 对 函 数 组 合 而 言 交 换 律 不 成 立 。 

上取整函数和下取整函数的性质

表 2-3 
上 取 整 函 数 和 下 取 整 函 数 的 有 用 性 廣 ( れ 整 数 ) 
( れ ) L* 」 = れ 当 且 僕 当 れ ェ く ″ + ー 
(l い ト 〃 当 且 収 当 ル - ヨ < 文 ( ” 
(lc) ェ 」 一 れ 当 且 僕 当 ょ ー ー く 宿 、 ェ 
()d ) 「 エ ト れ 当 且 収 当 1 く れ < ェ ・ い 
( 2 ー ー く レ 長 ェ 可 ェ ェ + ー 
( 3 麸 ) ト え = ー 「 司 
( 3 い ト ェ 1 = ー L ェ 」 

上取整函数和下取整函数的证明

例 27 证 明 ： 若 是 一 个 实 数 ， 则 L2 工 」 一 巨 」 + 上 + 一 
“ 解 要 证 明 这 个 语 句 ， 令 上 一 烈 + 《 ， 其 中 ” 是 正 整 数 且 0 < 《 < 1 · 依 据 E 是 否 小 于 
有 两 种 情 况 要 考 虑 。 （ 选 择 这 两 种 情 况 的 原 因 见 下 面 的 证 明 。 〕 
首 先 考 虑 0 < e < 一 的 情 况 。 此 时 ， 2 工 ： + 2 《 且 12 到 一 ‰ ， 因 为 0 < 厶 < ] “ 类 似 地 ， 工 + 一 
，， 十 (—+E). 使 得 ， 十 一 ， “ 因 为 0 < 可 十 。 < ] 。 因 此 
E¯ 
L 2 到 一 
接 下 来 ， 考 虑 < E < 1 的 情 况 ． 
可 得 一 2 到 一 2 “ + 1 。 因 为 工 + 一 
刀 十 因 此 ， L 以 」 一 2 “ + 1 且 L 泌 」 十 
2 ” 且 
此 时 ， 2 工 一 2n- + ． 2E 一 （ 2 “ + 1 ） + （ 2e ． 一 l) 。 由 于 C < 2' 一 1 < 1 ， 
+ 1 十 
且 0 E 一 一 < I ， 可 得 工 + 一 

**SUMMARIES**

1. 函数的定义与引言。
2. 一对一函数和映上函数。
3. 反函数和函数组合。
4. 函数的图像。

Chapter2-4. 序列与求和

2019年3月29日

16:25

**NOTE TAKING AREA**

序列的基本定义

* 序列：从整数集合的子集到集合S的函数，用记号an表示整数n的像。
  + 其中，**几何序列**的定义如下：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image134.png

* 其中，**等差序列**的定义如下：

C:\EF340E45\224B935C-4930-4B43-88CB-FDD0B8261FB1.files\image135.png

特殊的整数序列

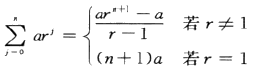
* *找出构造序列项的公式或一般规则，确定目标序列。考虑相同值、前项与后项之差为常数、前项与后项之商为常数、后项是前项的组合、循环。*

数列的求和

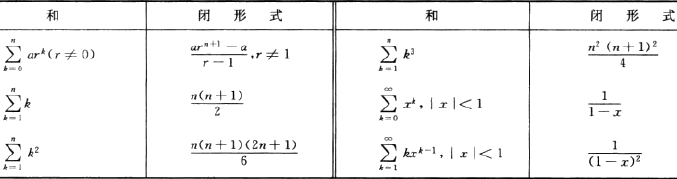
* 求和记号用以表示数列的下标值至上标之和：

计算机生成了可选文字:
或

* 几何序列的求和公式：



* 其中r≠0.
* 求和公式的其他应用：



无限集合的基数

* 有限集的基数为集合中的元素个数，推广至无限集则是：
* 两个集合具有相同的基数，当且仅当存在从A到B的一一对应。
  + **有限集**与**自然数集**基数相同的集合都称为可数的，否则为不可数的。

计算机生成了可选文字:
如果一个无穷集合s是可数的，我们用符号&来表示集合s的基数（8是希伯来语，希伯来字
母表的第一个字母）。记《冖，且说S有基数'希伯来零”

**CUE COLUMN**

特殊的整数序列的例子

例 5 
求 具 有 下 列 前 5 项 的 序 列 公 式 《 
解 0 ） 可 以 看 出 分 母 都 是 2 的 幂 ． 满 足 亠 02 ， 的 序 列 是 候 选 解 序 列 “ 这 个 候 选 序 列 
是 儿 何 序 列 ， 满 足 。 一 1 和 r 亠 1 / 2 ． 
（ 注 意 每 一 项 都 是 对 前 一 项 加 2 而 得 到 的 ． 满 足 亠 2 ” + 1 的 序 列 是 候 选 解 序 列 ． 这 个 候 选 
序 列 是 等 弟 序 列 ， 满 足 = 1 和 d= 2 ． 
（ c) 各 唢 轮 流 取 的 1 和 一 长 满 足 丐 = （ 一 l) ' 的 序 列 是 候 选 解 序 列@ 这 个 候 选 序 列 是 几 何 序 列 ， 
满 足 = 1 和 ， = 一 0 
0 

证明正奇数集合是可数集合

例 18 证 明 ： 正 奇 数 集 合 是 可 数 集 合 。 
解 要 证 明 正 奇 数 集 合 是 可 数 的 ， 就 说 明 这 个 集 合 与 正 整 数 集 合 之 间 的 一 一 对 应 ． 考 虑 从 
到 止 奇 数 集 合 的 数 
证 明 了 既 是 单 的 又 是 膚 的 ， 即 证 明 了 是 一 一 对 应 的 ． 为 了 看 出 是 单 的 ， 假 定 一 不 m). ， 是 
一 1 = 2 m 一 ] ， 所 以 “ 亠 m 。 为 了 看 出 7 是 满 的 ， 假 定 t 是 止 奇 数 ， 十 是 《 比 偶 数 以 少 1. 其 中 孬 
是 自 然 数 。 因 此 ' 亠 以 一 《 亠 k) “ 图 2 刁 8 显 示 这 个 一 一 对 应 。 
0 

证明实数集合是不可数集合

例 2 ] 证 明 ： 实 数 集 合 是 不 可 数 集 合 老 
要 讧 明 实 数 集 合 是 不 可 数 的 ， 就 假 定 实 数 集 合 是 可 数 的 并 得 出 矛 盾 ． 于 是 ， 所 有 
落 在 0 和 1 之 间 的 实 数 所 成 的 子 集 合 也 是 可 数 的 （ 因 为 可 数 集 合 的 所 有 子 集 合 都 是 可 数 
的 ， 参 见 本 节 末 练 习 35L 在 此 假 设 下 ， 在 0 和 I 之 伺 的 实 数 按 照 某 种 顺 序 列 出 ， 比 如 说 0 ， 0 ， 
． “ 没 这 些 实 数 的 十 进 制 表 示 为 
0 、 Idea 右 还 疒 ． 
= 0 ． 嘲 1 》 疒 
其 中 嘲 { 0 ． 1. 2 ． 3 ， I. 5 ， 6 ， 7 ， R ， 9 ， ． （ 例 如 ， 如 果 ， 《 一 0 ． 237 1 02 ． “ ， 就 有 《 一 2 ， 
= 3 ， @， = 7 ， 等 等 0 于 是 ， 构 造 新 的 实 数 具 有 十 进 制 展 开 式 
确 定 十 进 制 数 字 《 
4 若 嘲 才 还 
亠 0 ． 嘲 ． 
， 其 中 用 下 列 规 则 
= 0 ． R0553g00 艹 
0 ， ， 0 ． 091 187 引 “ 
0 - 0 ． 44590 ] 38 一 
（ 例 如 ， 假 定 0 亠 0 、 237941 02 “ 
一 仇 4 到 4 ． “ ， 其 中 因 为 右 4 ， 一 因 为 一 耘 ： 5 ， 因 为 
等 等 ， 于 是 ， 一 0 d “ 0 
d “ 乒 4 ， 还 一 因 为 d “ 乒 4 ， 一 4 ； 等 等 0 
每 忄 实 数 都 有 唯 一 的 十 进 制 展 歼 式 （ 展 开 式 结 尾 全 部 由 数 字 9 组 成 的 可 能 性 除 外 〕 · 于 是 ， 实 
数 ， 不 等 于 0 ， 0 ， ． “ 中 的 仃 何 一 个 ， 因 为 对 每 个 i 来 说 ， r 的 4 进 制 展 开 式 与 0 的 十 进 制 展 开 式 
在 小 数 点 右 边 第 i 位 是 不 同 的 · 
由 于 存 在 着 不 在 列 表 中 血 在 0 和 1 之 间 的 实 数 ， 、 所 以 可 以 列 出 在 0 和 1 之 间 所 有 实 数 的 假 殳 
就 必 定 为 假 ． 因 此 ， 不 能 列 出 在 c 和 ] 之 间 的 所 有 实 数 ， 在 0 和 1 之 间 的 实 数 集 合 是 不 可 数 的 ， 任 
何 有 不 可 于 集 合 的 集 合 都 是 不 可 数 的 （ 参 见 本 节 末 练 习 37 ） ． 因 此 实 数 集 合 是 不 可 数 的 · 
0 

**SUMMARIES**

1. 序列的基本定义。
2. 特殊的整数序列。
3. 数列的求和。
4. 无限集合的基数。